Grundlagen der Robotik

Wintersemester 2015/2016
Übungsblatt 4

Betreuer: Sebastian Buck und Julian Jordan
Abgabe: 16.11.2015, Besprechung: 23.11.2015

Aufgabe 1 (8 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass folgende Matrix für beliebige m, n und ϕ invertierbar ist: (2 Punkte)

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & m \\ \sin\phi & \cos\phi & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Rotationsmatrizen in n Dimensionen sind genau jene Matrizen $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, die folgende Eigenschaften erfüllen:

- Sie erhalten das Skalarprodukt zweier beliebiger Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$x^T y = (R \cdot x)^T (R \cdot y)$$

- Sie sind orientierungserhaltend:

$$\det(R) = 1$$

Zeigen Sie, dass aus dieser Definition folgt: (3 Punkte)

- Jede Rotationsmatrix ist invertierbar.
- Die Inverse einer Rotationsmatrix ist ihre Transponierte, also: $R^{-1} = R^T$

(c) Transformationen zwischen 3D-Koordinatensystemen geben wir meist als homogene Transformationsmatrizen in folgender Form an:

$$T = \begin{pmatrix} R & t \\ 0^{1\times 3} & 1 \end{pmatrix}$$

Hierbei sind $R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Rotationsmatrix und $t \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ der Translationsvektor in 3D. Wir wissen, dass auch die inverse Transformation durch eine Matrix dieser Form dargestellt werden kann:

$$T^{-1} = T_i = \begin{pmatrix} R_i & t_i \\ 0^{1\times 3} & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie R_i und t_i in Abhängigkeit von R und t. (3 Punkte)

Aufgabe 2 (6 Punkte)

(a) Gegeben seien die Vektoren $x = (1, 0, 0)^T$ und $y = (0, 1, 0)^T$. Bestimmen Sie rechnerisch das Kreuzprodukt $z = x \times y$. Wenden Sie ferner die Rechte-Hand-Regel an und zeichnen Sie die Richtung des Zeigefingers, des Mittelfingers und des Daumens. (1 Punkt)

(b) Berechnen Sie das Kreuzprodukt w der beiden Vektoren $u = (-1, 5, -1)^T$ und $v = (7, 1, -3)^T$, $w = u \times v$. Zeigen Sie, dass w sowohl orthogonal zu u als auch zu v ist. (1 Punkt)

(c) Geben Sie an, welche der folgenden Drehungen um 90° einen positiven (+) oder einen negativen (-) Drehsinn aufweist. (1 Punkt)

(i) Drehung eines Punktes auf der $(-y)$-Achse um die $(+z)$-Achse auf die $(+x)$-Achse.

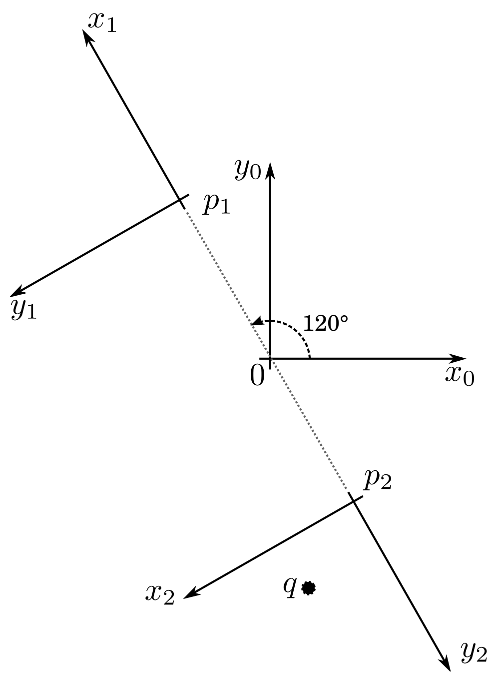
(ii) Drehung eines Punktes auf der $(-z)$-Achse um die $(-y)$-Achse auf die $(-x)$-Achse.

(d) Bestimmen Sie für folgende Matrizen jeweils, ob es sich um eine Rotationsmatrix in $\mathbb{R}^3$ handelt und geben Sie ggf. Rotationswinkel und Rotationsachse an. (3 Punkte)

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad M_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_c = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_d = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Es seien Koordinatensysteme wie in der Abbildung gegeben: Der Ursprung von Koordinatensystem (Frame) 0 sei $(0, 0)^T$. Die x_1-Achse sei um 120° gegenüber der x_0-Achse gedreht. Der Ursprung von Frame 1 sei der Punkt ${}^0\mathbf{p}_1 = (-2, 2\sqrt{3})^T$ in Bezug auf Frame 0. Ferner seien ${}^0\mathbf{p}_2 = -{}^0\mathbf{p}_1$ und die x_2-Achse parallel zur y_1-Achse. Die Notation ${}^i\mathbf{p}$ stelle die Koordinaten des Punktes $\mathbf{p}$ in Bezug auf das i-te Koordinatensystem dar.



(a) Welche Transformationen werden benötigt, um einen Punkt $\mathbf{p}$ vom Koordinatensystem 1 oder 2 ins Koordinatensystem 0 zu transformieren? Beschreiben Sie diese kurz qualitativ und geben Sie die homogenen Transformationsmatrizen ${}^0\mathbf{T}_1$ und ${}^0\mathbf{T}_2$ an. (2 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die inversen Matrizen $({}^0\mathbf{T}_1)^{-1} = {}^1\mathbf{T}_0$ und $({}^0\mathbf{T}_2)^{-1} = {}^2\mathbf{T}_0$. (2 Punkte)

(c) Wie lauten die Koordinaten von $\mathbf{q}$ in Frame 0 und in Frame 1, wenn der Punkt in Frame 2 die Koordinaten ${}^2\mathbf{q} = (2, 1)^T$ besitzt? (2 Punkte)