Grundlagen der Robotik

Wintersemester 2015/2016
Übungsblatt 5

Betreuer: Sebastian Buck und Julian Jordan
Abgabe: 23.11.2015, Besprechung: 30.11.2015

Aufgabe 1 (6 Punkte)

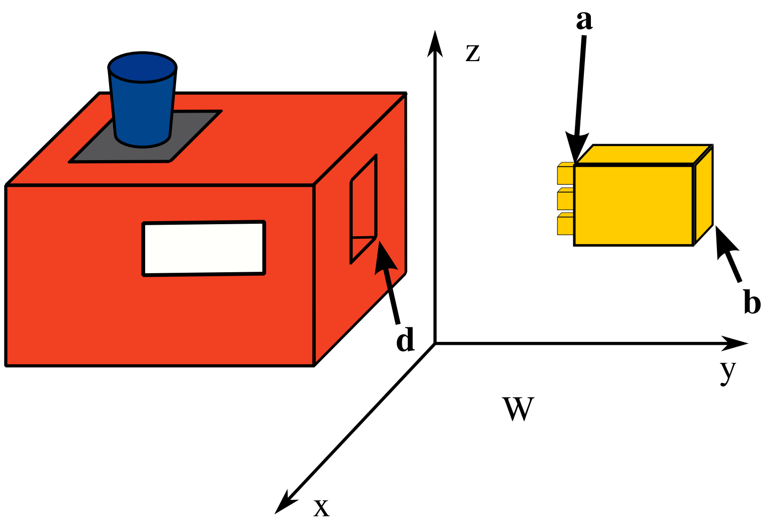
Ein Roboter soll die in der Abbildung gezeigte Montageaufgabe für den DLR SpaceBot Cup 2015 durchführen. Die Batterie (rechts) soll dabei so in das Basisobjekt (ein Quader mit passender Aussparung) eingefügt werden, dass der Punkt $\mathbf{b}$ an $\mathbf{d}$ anliegt und die Anschlüsse der Batterie innerhalb des Basisobjekts einen Kontakt herstellen. Es sei $\mathbf{d} = (1, 0, 2)^T$, und die offene Seite des Basisobjekts befinde sich in in der xz-Ebene. Weiterhin seien die Dimensionen der Batterie $(1, 3, 2)^T$, wenn sie wie in der Zeichnung positioniert ist.

(a) Sei $\mathbf{a} = (0, 2, 2)^T$ und $\mathbf{b} = (-1, 5, 0)^T$. Berechnen Sie die homogene Transformationsmatrix $\mathbf{T}_a$ bezüglich des Weltkoordinatensystems W, welche die Montagebewegung realisiert. Ignorieren Sie Kollisionen zwischen Basisobjekt und Batterie. (1 Punkt)

(b) Wie kann die Transformation $\mathbf{T}_a$ in zwei Transformationen aufgeteilt werden, damit die Batterie beim Einfügen nicht mit dem Basisobjekt kollidiert? (2 Punkte)

(c) Berechnen Sie nun zwei Transformationen für die Montage aus der Ausgangslage $\mathbf{a} = (2, 3, 1)^T$ und $\mathbf{b} = (5, 1, 0)^T$, so dass keine Kollision beim Einbau auftritt. (3 Punkte)

Erläutern Sie alle Transformationen unter Zuhilfenahme einer Skizze.



Aufgabe 2 (6 Punkte)

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit Darstellungen von Rotationen durch drei Roll-Pitch-Yaw-Winkel.

(a) Welche Rotationsmatrix erhalten Sie für folgende Roll-Pitch-Yaw-Winkel? (1 Punkt)

$$\phi = 0, \theta = \frac{\pi}{2}, \psi = \frac{\pi}{2}$$

(b) Berechnen Sie die Ableitungen der Roll-Pitch-Yaw-Matrix nach dem Roll- und Yaw-Winkel, ausgewertet an den gegebenen Stellen: (4 Punkte)

$$\left.\frac{\partial}{\partial \phi}\mathbf{RPY}(\phi, \theta, \psi)\right|_{\phi=0,\theta=\pi/2,\psi=\pi/2} \qquad \text{und} \qquad \left.\frac{\partial}{\partial \psi}\mathbf{RPY}(\phi, \theta, \psi)\right|_{\phi=0,\theta=\pi/2,\psi=\pi/2}$$

Hinweise:

(i) Das Ergebnis ist je eine 3x3 Matrix, die Sie durch komponentenweise Ableitung erhalten.

(ii) Die meisten Einträge sind 0, wodurch die Berechnung viel schneller geht als auf den ersten Blick geahnt.

(c) Was fällt Ihnen beim Vergleich der beiden Ableitungen auf? Sie beobachten hier den Effekt des sog. Gimbal Locks. Welcher weitere Wert für θ führt zu einem vergleichbaren Effekt? (1 Punkt)

Aufgabe 3 (8 Punkte)

(a) Bestimmen Sie das Quaternion $\mathbf{Q}_a$, welches folgender Transformation entspricht: Rotation um die x-Achse um $60°$, anschließend Rotation um die z-Achse um $90°$. (2 Punkte)

(b) Rotieren Sie nun den Punkt $P = (1, 1, 0)$ mit Hilfe von $\mathbf{Q}_a$. (1 Punkt)

(c) Wie viele Multiplikationen und Additionen benötigen Sie, um eine durch ein Einheitsquaternion gegebene Rotation eines gegebenen Punktes möglichst effizient zu berechnen? Nutzen Sie hierfür das Ergebnis aus der vorigen Teilaufgabe und vereinfachen Sie es, so weit Sie können. (1 Punkt)

(d) Zeigen Sie, dass die Konjugierte $\mathbf{Q}^*$ eines Einheitsquaternions $\mathbf{Q}$ gleichzeitig seine Inverse ist (Gleichung 4.47 im Skript):

$$\mathbf{Q}^* \times \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}^* = [1, 0, 0, 0] \, .$$

(1 Punkt)

(e) Welches Quaternion $\mathbf{Q}_d$ entspricht der allgemeinen Roll-Pitch-Yaw-Matrix $\mathbf{RPY}(\phi, \theta, \psi)$? Berechnen Sie seine Einträge in Abhängigkeit der drei Winkel. (3 Punkte)
Hinweise:

(i) Bestimmen Sie zunächst jene Quaternionen, die den drei Teilrotationen entsprechen.

(ii) Falls Ihnen die Berechnung von Hand zu mühsam ist, dürfen Sie auch gerne auf ein Computeralgebrasystem Ihrer Wahl zurückgreifen. Geben Sie dann zusätzlich zur Lösung die von Ihnen verwendete Befehlsfolge an.